Colles de Maths - semaine 4
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Questions de cours

— Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques circulaires (définition, continuité, dérivabilité, expression des dérivées)

— Primitives usuelles

Exercice 1 (la fonction argument tangente hyperbolique)

1. Rappeler la définition de la fonction tangente hyperbolique. Tracer son graphe. Vérifier qu'elle est injective. Quelle est son image ?
2. On appelle argth sa réciproque. Déterminer sa dérivée.
3. Déterminer une expression explicite de argth avec la fonction logarithme.

Exercice 2

1. Soit $x \in [-1, 1]$. Que vaut $\cos(\arccos x)$?
2. Tracer la courbe de la fonction $\arccos \circ \cos$.

Exercice 3

1. Soit $x \in [-1, 1]$. Que valent $\cos(\arccos x)$, $\cos(\arcsin x)$, $\sin(\arcsin x)$, $\sin(\arccos x)$, $\tan(\arccos x)$, $\tan(\arcsin x)$?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Que valent $\tan(\arctan x)$, $\cos(\arctan x)$, $\sin(\arctan x)$?

Exercice 4 Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Déterminer une expression du module et d'un argument de z en fonction de x et y.

Exercice 5 (translation et dérivation discrète) Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les opérateurs suivants (c'est-à-dire des fonctions de E dans E) :

— pour tout $f \in E$, $\tau(f)$ est la fonction $x \longmapsto f(x+1)$

— pour tout $f \in E$, $\delta(f)$ est la fonction $x \longmapsto f(x+1) - f(x)$.

1. τ, δ sont-elles injectives ?
2. Déterminer l'image réciproque de 0 par δ.
3. Montrer que δ est surjective.

Exercice 6 Calculer les quantités suivantes :

1. $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$
2. $\arccos(1 - 2x^2)$ pour $x \in [-1, 1]$
3. $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ pour $x \in [-1, 1]$

Exercice 7 Résoudre l'équation $5\operatorname{ch}(x) - 4\operatorname{sh}(x) = 3$.

Exercice 8 Tracer le graphe de la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

Exercice 9 (intégrales de Wallis) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt$, et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, dt$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = J_n$.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
3. A l'aide d'une intégration par parties, donner une relation de récurrence faisant intervenir I_n et I_{n+2}.
4. En déduire l'expression générale de I_n.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \, I_n \, I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
6. Montrer que $\sqrt{\frac{2n}{\pi}} \, I_n \longrightarrow 1$.

Exercice 10 Donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{2 + \cos x}$ sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$.

Exercice 11 Donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x \arctan x}{(1 + x^2)^2}$.

Exercice 12 Donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x \ln x \, (1 + \ln^5 x)}$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.